

Lezione 11

Progetto del controllore

Specifiche di progetto

Consideriamo nuovamente un sistema di controllo in retroazione:

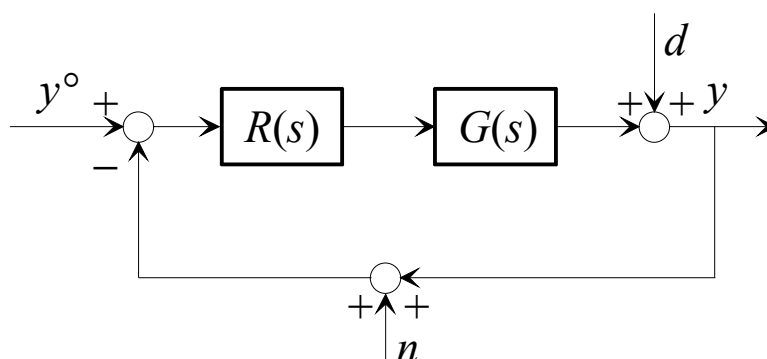


Fig. 1 : Sistema di controllo

Supporremo assegnata la funzione di trasferimento $G(s)$, e ci porremo l'obiettivo della **sintesi** (o **progetto**) della funzione di trasferimento $R(s)$ del controllore, sulla base di un certo numero di specifiche.

Il metodo che seguiremo¹ sarà basato sul criterio di Bode, e come tale prevederà il rispetto, da parte della funzione di trasferimento d'anello $L(s) = R(s)G(s)$, delle ipotesi necessarie per l'applicabilità del criterio. Ciò comporta, in particolare, che il metodo non sarà applicabile se $G(s)$ ha poli a parte reale positiva. Infatti tali poli, che non possono essere cancellati da corrispondenti zeri nella funzione di trasferimento $R(s)$, si presentano anche in $L(s)$, violando una condizione del criterio.

Le specifiche con le quali tipicamente si imposta il progetto sono le seguenti:

1. Asintotica stabilità

In base al criterio di Bode questa specifica implica:

$$\boxed{\varphi_m > 0}.$$

2. Grado di stabilità e robustezza

La stabilità deve essere garantita con un certo margine rispetto ad inesattezze nella modellistica del sistema sotto controllo. Inoltre si vuole che il sistema di controllo, sollecitato da ingressi canonici (scalino, impulso), esibisca risposte ben smorzate. Entrambe queste condizioni sono approssimativamente soddisfatte se il margine di fase dell'anello è superiore di un valore limite, di volta in volta specificato:

$$\boxed{\varphi_m > \overline{\varphi_m}}.$$

3. Velocità di risposta

Il sistema di controllo deve reagire prontamente a variazioni nel segnale di riferimento o sui disturbi. Sappiamo che, se il margine di fase è sufficientemente elevato, i transitori del sistema in anello chiuso sono governati da una costante di tempo pari all'inverso della

¹ Per una trattazione analoga a quella qui presentata ma di maggiore respiro, si può consultare il Capitolo 2 del testo: "Esercizi di Controlli Automatici", G.O. Guardabassi e P. Rocco, Pitagora Editrice.

pulsazione critica ω_c . Imporre un valore massimo alla durata dei transitori equivale quindi ad imporre un valore minimo alla pulsazione critica:

$$\omega_c \geq \bar{\omega}_c.$$

4. Precisione statica

A seguito dell'imposizione di assegnati segnali canonici agli ingressi, l'errore tra riferimento e variabile controllata deve essere, a transitorio esaurito, nullo o inferiore in modulo ad una assegnata soglia:

$$|e_\infty| \leq \bar{e}_\infty.$$

5. Specifiche aggiuntive

Talvolta possono essere date delle ulteriori specifiche, come l'uso di un controllore dalla struttura assegnata (cioè con un dato numero di poli e zeri), limitazioni all'azione di controllo, attenuazione di specifici disturbi (tipicamente sinusoidali).

Impostazione del progetto

Il progetto viene di norma suddiviso in due fasi:

1. Progetto statico

E' la fase in cui ci si preoccupa di soddisfare la specifica relativa alle prestazioni statiche (errore a transitorio esaurito). Si affronta con l'ipotesi preliminare di essere in grado di rendere il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile nella successiva fase di progetto dinamico.

Si fattorizza la funzione di trasferimento del regolatore come segue:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s),$$

con:

$$R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}, \quad R_2(s) = \frac{\prod_i (1 + sT_i)}{\prod_k (1 + s\tau_k)}.$$

Dal momento che $R_2(0) = 1$, le prestazioni statiche sono unicamente determinate dalle scelte effettuate sui parametri di $R_1(s)$. Per non complicare la successiva fase di progetto, si sceglie:

- il valore minimo del tipo g_R che consente di soddisfare la specifica statica;
- fissato g_R , il valore minimo del guadagno μ_R che consente di soddisfare la specifica.

Può succedere, a valle della scelta del tipo del regolatore, che il valore del guadagno risulti indeterminato: in questo caso è possibile assegnare il guadagno in fase di progetto dinamico.

2. Progetto dinamico

Si determina $R_2(s)$ (poli e zeri del controllore), in modo tale da soddisfare le specifiche dinamiche su margine di fase e velocità di risposta. Si procede per mezzo di una serie, ragionata, di tentativi di sintesi.

Esempio introduttivo

Si consideri il sistema di controllo di figura:

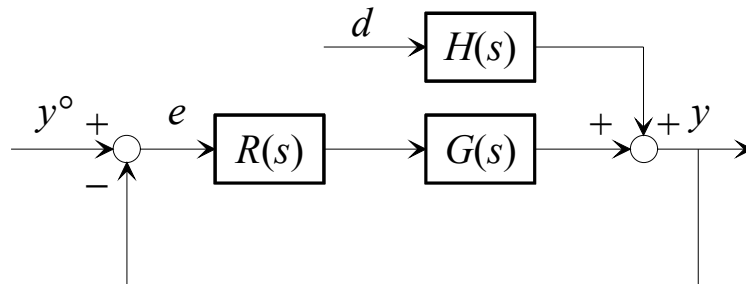


Fig. 2 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = \frac{50}{(1+0.1s)(1+s)(1+10s)}, \quad H(s) = \frac{5}{1+0.01s}.$$

Si vuole progettare il regolatore $R(s)$ in modo tale che:

- $|e_\infty| \leq 0.025$ per $y^o(t) = 10 \text{ sca}(t)$, $d(t) = \pm \text{sca}(t)$;
- $\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$;
- $\phi_m \geq 60^\circ$.

Progetto statico

Fattorizzata $R(s)$ come:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s), \quad R_2(0) = 1,$$

si deve progettare $R_1(s) = \mu_R / s^{g_R}$ in modo da soddisfare la specifica sull'errore a transitorio esaurito. Ipotizzando il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile e facendo uso, in virtù della linearità del sistema, del principio di sovrapposizione degli effetti, calcoliamo l'errore dovuto al segnale di riferimento:

$$\begin{aligned} e_\infty^o &= \lim_{s \rightarrow 0} [sE^o(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1+L(s)} Y^o(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + \frac{50\mu_R}{s^{g_R}}} \frac{10}{s} \right] = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{10s^{g_R}}{s^{g_R} + 50\mu_R} = \begin{cases} \frac{10}{1+50\mu_R}, & g_R = 0 \\ 0, & g_R \geq 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Il risultato è coerente con le tabelle della precisione statica della Lezione 10, pur di tenere conto che il guadagno d'anello vale $50\mu_R$ e che lo scalino ha ampiezza 10.

Passando all'errore dovuto al disturbo, si ha:

$$e_{d\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} [sE_d(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{-H(s)}{1+L(s)} D(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{-5}{1 + \frac{50\mu_R}{s^{g_R}}} \left(\pm \frac{1}{s} \right) \right] =$$

$$= \mp \lim_{s \rightarrow 0} \frac{5s^{g_R}}{s^{g_R} + 50\mu_R} = \begin{cases} \mp \frac{5}{1+50\mu_R}, & g_R = 0 \\ 0, & g_R \geq 1 \end{cases}$$

Anche in questo caso il risultato è coerente con le tabelle, tenendo conto che il disturbo va riportato in uscita (e quindi, agli effetti statici, va moltiplicato per il guadagno di $H(s)$).

Appare evidente che per entrambi i segnali di ingresso (riferimento e disturbo), la specifica sull'errore può essere garantita con regolatore di tipo nullo ($g_R = 0$). Adottando questo valore ed assumendo il guadagno μ_R positivo, si ha:

$$|e_{\infty}| = |e_{\infty}^o + e_{\infty}^d| \leq |e_{\infty}^o| + |e_{\infty}^d| = \frac{10}{1+50\mu_R} + \frac{5}{1+50\mu_R} = \frac{15}{1+50\mu_R}.$$

La specifica statica sarà quindi senz'altro soddisfatta se:

$$\frac{15}{1+50\mu_R} \leq 0.025 \Rightarrow \mu_R \geq \frac{15-0.025}{1.25} \approx 12.$$

Rispetto al valore limite calcolato dalla precedente disequaglianza, conviene predisporre un opportuno margine di sicurezza, inteso a cautelarsi verso le inevitabili incertezze sui parametri del processo e sul valore dei disturbi. Un valore opportuno potrebbe allora essere $\mu_R = 20$.

Il progetto statico è allora concluso con la scelta della funzione di trasferimento:

$$R_1(s) = 20.$$

Progetto dinamico

La funzione di trasferimento d'anello del sistema può essere scritta come:

$$L(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = R_2(s)L_1(s),$$

con:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{1000}{(1+0.1s)(1+s)(1+10s)}.$$

Il primo tentativo da eseguire per il progetto di $R_2(s)$ consiste nel porre banalmente $R_2(s) = 1$. La funzione di trasferimento d'anello coincide, allora, con $L_1(s)$, ed il relativo diagramma di Bode del modulo asintotico è tracciato di seguito:

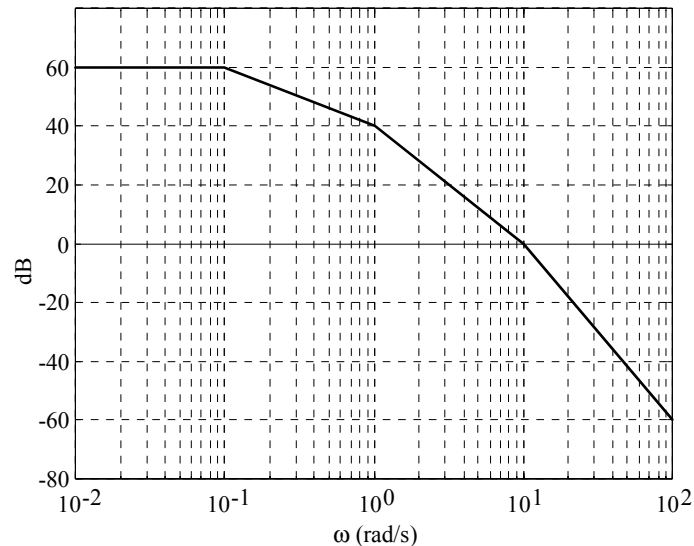


Fig. 3 : Diagramma di Bode asintotico di $|L_1|$

Mentre la pulsazione critica è abbondantemente superiore al valore limite imposto dalla specifica, il margine di fase risulta, come facilmente calcolabile, negativo, per cui il sistema in anello chiuso risulterebbe addirittura instabile.

Per il progetto di $R_2(s)$ si può ricorrere all'osservazione fatta nella Lezione 8 a proposito del criterio di Bode, riguardo ai sistemi a **fase minima**. Si ricorda che, per un sistema a fase minima, il fatto che l'attraversamento dell'asse a 0 dB da parte del diagramma asintotico del modulo della risposta in frequenza di L avvenga con pendenza -1 (-20 dB/decade) garantisce di norma un margine di fase positivo, tanto più prossimo ai 90° , quanto più ampio è il tratto di pendenza -1 .

Conviene allora procedere determinando preliminarmente un opportuno andamento per il diagramma del modulo di L e, a posteriori, risalire all'espressione della funzione di trasferimento del regolatore.

Il **metodo di progetto**, di natura grafica, consiste nell'individuare sull'asse a 0 dB un valore di pulsazione, superiore al limite inferiore richiesto per la pulsazione critica, e per questo punto tracciare un tratto di retta a pendenza -1 , destinato ad essere un tratto del diagramma di $|L|$.

In **bassa frequenza** si può operare come segue:

- il diagramma di $|L|$ deve avere la stessa pendenza di quello di $|L_1|$, altrimenti si modificherebbe il tipo del regolatore in sede di progetto dinamico;
- se il progetto statico si è concluso con un vincolo sul valore del guadagno μ_R , il valore di $|L|$ deve essere maggiore o uguale (di fatto è comodo sceglierlo uguale) a quello di $|L_1|$.

In **alta frequenza**, invece:

- il diagramma di $|L|$ deve avere pendenza maggiore o uguale in modulo (di fatto è comodo sceglierla uguale) a quella di $|L_1|$, altrimenti si perverrebbe al progetto di un regolatore non realizzabile (con più zeri che poli);
- il valore di $|L|$ deve essere minore o uguale a quello di $|L_1|$, per garantire la moderazione del controllo.

L'applicazione del metodo all'esempio porta, scegliendo come pulsazione critica il valore 2 rad/s, al grafico di $|L|$ di figura 4.

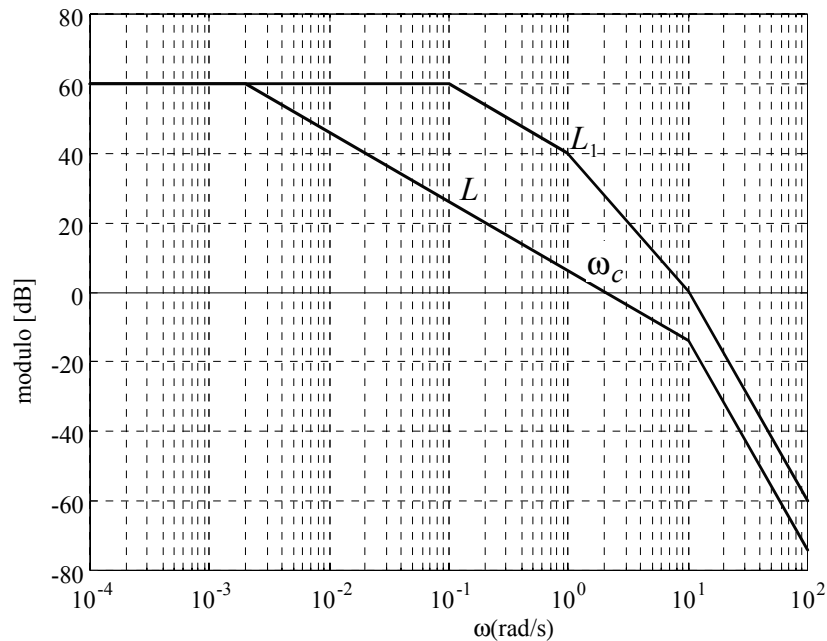


Fig. 4 : Diagramma di Bode asintotico di $|L|$

Il margine di fase risulta:

$$\varphi_m = 180^\circ - \left| -\arctan(2/0.002) - 2 \arctan(2/10) \right| = 180^\circ - \left| -90^\circ - 2 \times 11^\circ \right| = 68^\circ.$$

Le specifiche dinamiche sono quindi soddisfatte, e risulta:

$$L(s) = \frac{1000}{\left(1 + \frac{s}{0.002}\right) \left(1 + \frac{s}{10}\right)^2} = \frac{1000}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)^2}$$

Ne consegue:

$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{1000}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)^2} \frac{(1 + 0.1s)(1 + s)(1 + 10s)}{1000} = \frac{(1 + s)(1 + 10s)}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)}.$$

Infine:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 20 \frac{(1 + s)(1 + 10s)}{(1 + 500s)(1 + 0.1s)}.$$

Si osservi che in alta frequenza il diagramma di $|L|$ non si congiunge con il diagramma di $|L_1|$. Sarebbe stato lecito congiungere i due diagrammi, ma in questo caso si sarebbe ottenuto, come è facile verificare, un controllore di ordine 3 (con 3 poli), più problematico da realizzare.

Esempio di progetto per sistemi di tipo 1

Per il sistema di controllo di figura:

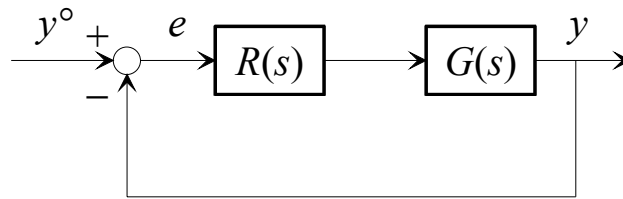


Fig. 5 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = \frac{10}{s(1+s)},$$

si vuole progettare il regolatore $R(s)$ in modo tale che:

- $e_\infty = 0$ per $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$;
- $\omega_c \geq 2 \text{ rad/s}$;
- $\phi_m \geq 40^\circ$.

Progetto statico

Procedendo come nell'esempio precedente, si ha:

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} [sE(s)] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1+L(s)} Y^\circ(s) \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \left[s \frac{1}{1 + \frac{10 \mu_R}{s} \frac{1}{s^{g_R}}} \right] = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^{g_R+1}}{s^{g_R+1} + 10\mu_R} = 0, \quad \forall g_R \geq 0$$

In questo caso, anche con regolatore di tipo nullo ($g_R = 0$) si ottiene errore statico nullo. Il tipo della funzione di trasferimento d'anello è infatti la somma del tipo del sistema sotto controllo e del tipo del controllore:

$$g_L = g_G + g_R.$$

Poiché nel presente caso $g_G = 1$, è sufficiente imporre $g_R = 0$ per avere un anello di tipo 1.

Il progetto statico quindi non impone nessun vincolo al regolatore e potremo porre, formalmente:

$$R_1(s) = 1.$$

Progetto dinamico

Poiché:

$$L(s) = R_1(s)R_2(s)G(s) = R_2(s)G(s),$$

conviene tracciare il diagramma del modulo di G per controllare se le specifiche sono già soddisfatte con $R_2 = 1$:

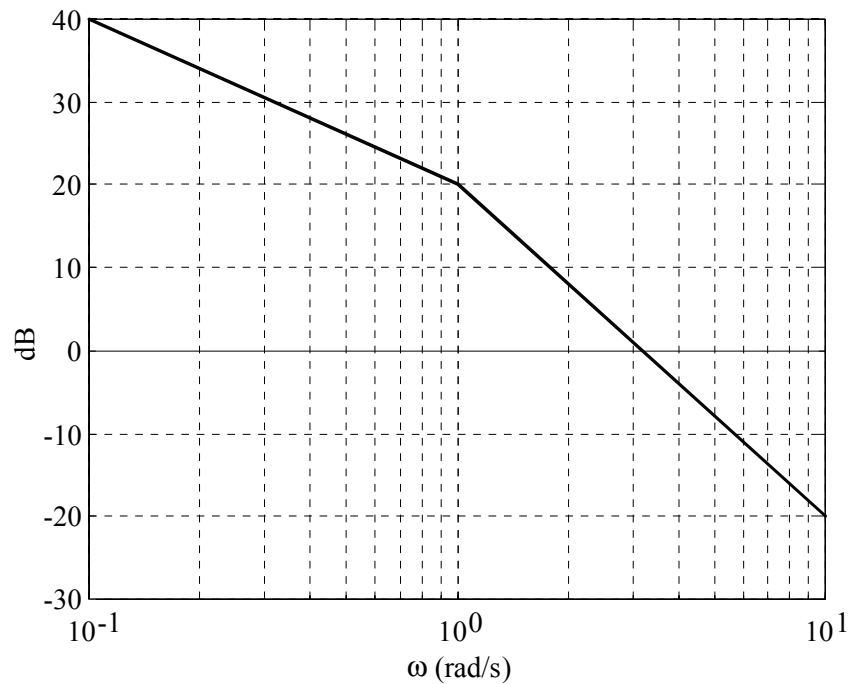


Fig. 6 : Diagramma di Bode asintotico di $|G|$

Si ha $\omega_c = 3$, ma:

$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - \arctan(3)| = 180^\circ - |-90^\circ - 71^\circ| = 19^\circ ,$$

che non soddisfa la specifica.

La soluzione grafica del progetto dinamico è riportata in Fig. 7: si osservi che in bassa frequenza si è evitato di raccordare i diagrammi del modulo di L e G , in quanto il progetto statico non impone alcun vincolo sul guadagno del regolatore.

Si ottiene $\omega_c = 2$, e:

$$\varphi_m = 180^\circ - |-90^\circ - \arctan(2/5)| = 180^\circ - |-90^\circ - 22^\circ| = 68^\circ .$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = \frac{2}{s} \frac{1}{1+s/5} = \frac{2}{s} \frac{1}{1+0.2s} ,$$

da cui:

$$R(s) = R_2(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = \frac{2}{s} \frac{1}{1+0.2s} \frac{s(s+1)}{10} = 0.2 \frac{1+s}{1+0.2s} .$$

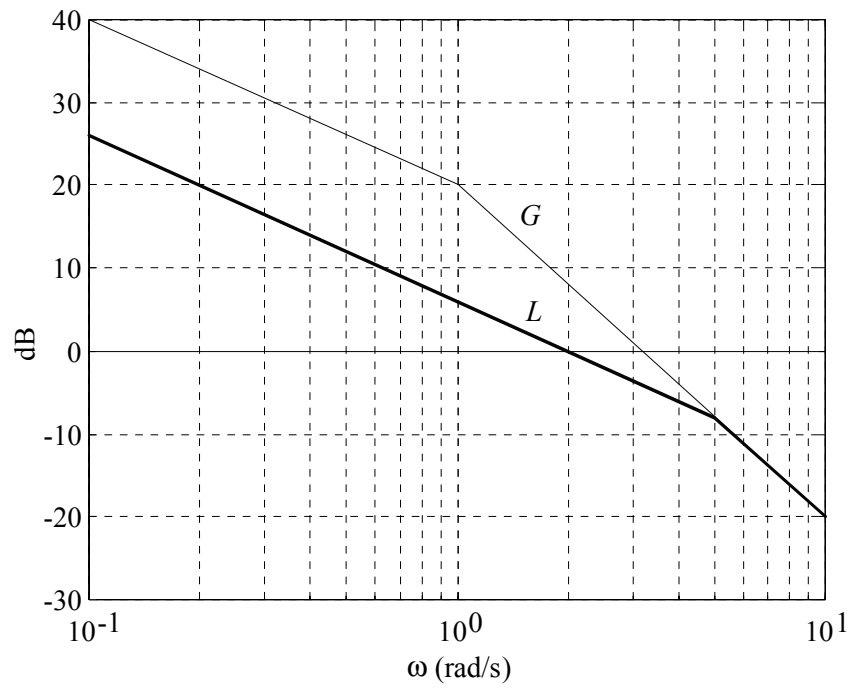


Fig. 7 : Diagrammi di Bode asintotici di $|G|$ e $|L|$

Esempio di progetto per sistemi con zeri a parte reale positiva

Per il sistema di controllo di figura:

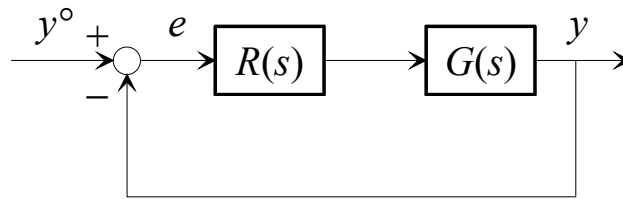


Fig. 8 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = 10 \frac{1-2s}{1+10s},$$

si vuole progettare il regolatore $R(s)$ in modo tale che:

- $e_\infty = 0$ per $y^\circ(t) = \text{sca}(t)$;
- $\omega_c \geq 0.1 \text{ rad/s}$;
- $\varphi_m \geq 40^\circ$.

Il progetto statico impone la presenza di un integratore nel controllore, mentre non ne vincola in alcun modo il guadagno. Possiamo allora porre:

$$R_1(s) = \frac{1}{s}.$$

Scritta la funzione di trasferimento d'anello come:

$$L(s) = R_2(s)L_1(s),$$

con:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{10}{s} \frac{1-2s}{1+10s},$$

tracciamo il diagramma di Bode del modulo di L_1 :

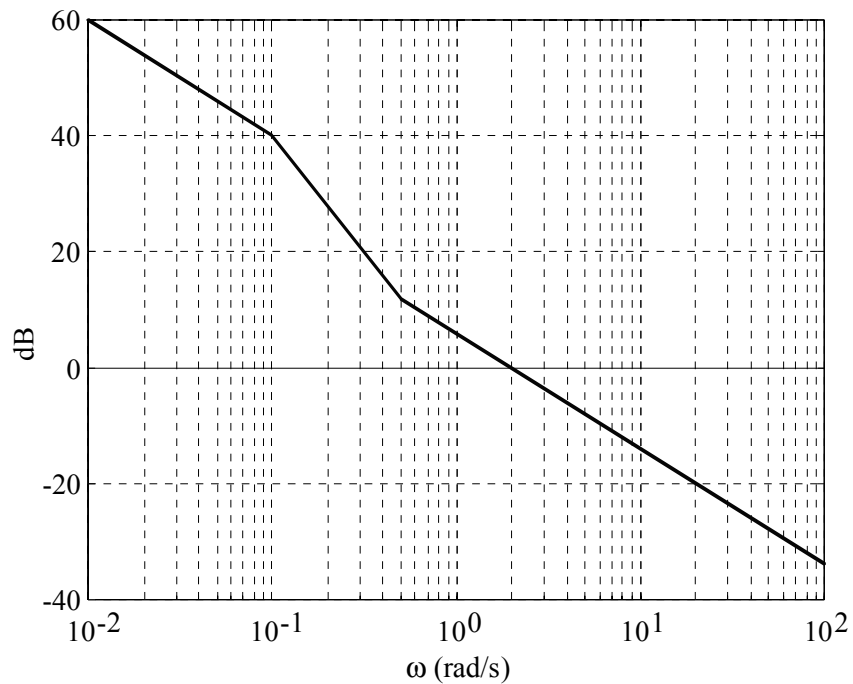


Fig. 9 : Diagramma di Bode asintotico di $|L_1|$

Risulta $\omega_c = 2$, e:

$$\varphi_m = 180^\circ - \left| -90^\circ - \arctan(2/0.1) - \arctan(2/0.5) \right| = 180^\circ - \left| -90^\circ - 87^\circ - 76^\circ \right| = -73^\circ .$$

Il sistema in anello chiuso sarebbe quindi instabile.

Si osservi che il contributo di fase dello zero alla pulsazione 0.5 rad/s è negativo, essendo lo zero a parte reale positiva. Il sistema non è quindi “a fase minima”, ed il fatto che il diagramma del modulo tagli l’asse a 0 dB con pendenza -1 non implica margine di fase positivo. D’altra parte lo zero non può essere cancellato da un corrispondente polo nel regolatore, pena il manifestarsi di una instabilità interna. L’unico provvedimento utile in questo caso è fare in modo che la pulsazione critica risulti sensibilmente inferiore alla pulsazione dello zero, in modo che il contributo negativo alla fase critica sia meno rilevante.

Si consideri ad esempio la soluzione riportata in figura:

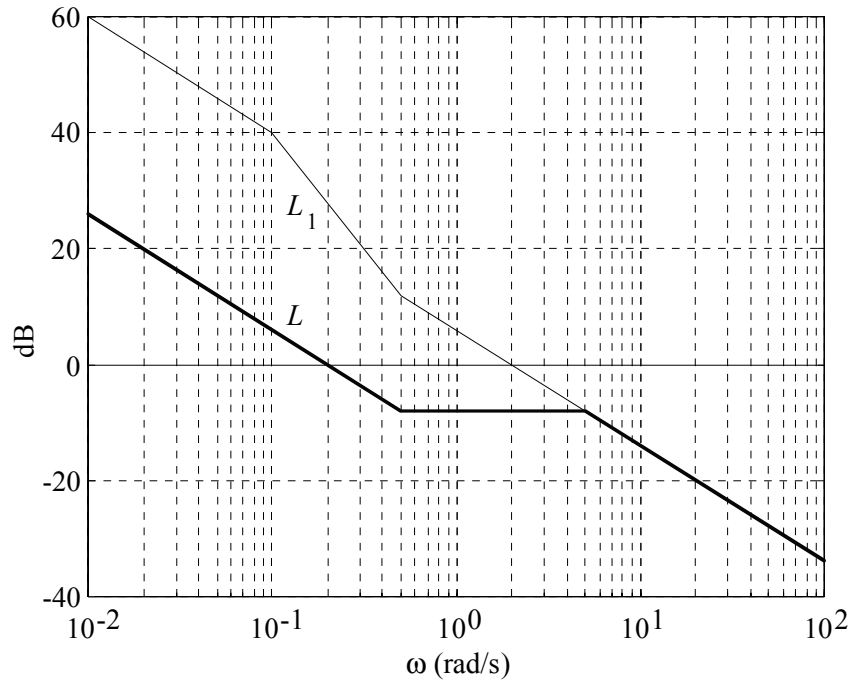


Fig. 10 : Diagrammi di Bode asintotici di $|L_1|$ e $|L|$

Risulta $\omega_c = 0.2$, e:

$$\varphi_m = 180^\circ - \left| -90^\circ - \arctan(0.2/0.5) - \arctan(0.2/5) \right| = 180^\circ - \left| -90^\circ - 22^\circ - 2^\circ \right| = 66^\circ .$$

Anche in questo esempio, come nel precedente, i diagrammi non sono stati raccordati in bassa frequenza, non essendoci un vincolo di guadagno dato dal progetto statico.

Risulta quindi:

$$L(s) = \frac{0.2}{s} \frac{1-2s}{1+s/5} = \frac{0.2}{s} \frac{1-2s}{1+0.2s} ,$$

da cui:

$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{0.2}{s} \frac{1-2s}{1+0.2s} \frac{s}{10} \frac{1+10s}{1-2s} = 0.02 \frac{1+10s}{1+0.2s} ,$$

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{0.02}{s} \frac{1+10s}{1+0.2s} .$$

Esempio di progetto per sistemi con ritardo

Per il sistema di controllo di figura:

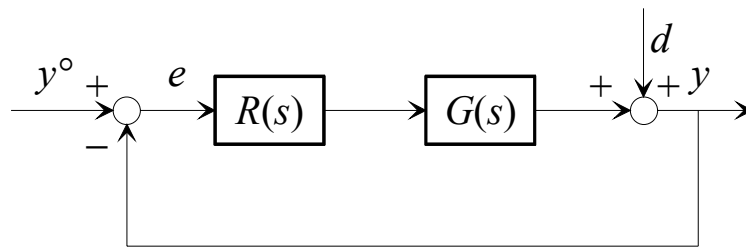


Fig. 11 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{(1+10s)(1+s)},$$

si vuole progettare il regolatore $R(s)$ in modo tale che:

- $|e_\infty| \leq 0.15$ per $d(t) = \pm sca(t)$;
- $\omega_c \geq 0.3 \text{ rad} / s$;
- $\varphi_m \geq 40^\circ$.

Progetto statico

Supposto il sistema di controllo asintoticamente stabile, il ritardo non gioca alcun ruolo nel determinare le prestazioni statiche. Dalle tabelle della precisione statica otteniamo che per funzione di trasferimento d'anello di tipo 0 risulta:

$$|e_\infty| = \frac{1}{1+\mu_L}.$$

Pertanto, scelto un regolatore di tipo 0, si dovrà imporre:

$$\frac{1}{1+\mu_R} \leq 0.15 \Rightarrow \mu_R \geq 5.67.$$

Possiamo cautelarci contro eventuali incertezze ponendo $\mu_R = 10$, e quindi concludere che:

$$R_1(s) = 10.$$

Progetto dinamico

Scritta la funzione di trasferimento d'anello come:

$$L(s) = R_2(s)L_1(s) ,$$

con:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = 10 \frac{e^{-s}}{(1+10s)(1+s)} ,$$

tracciamo il diagramma di Bode del modulo di L_1 :

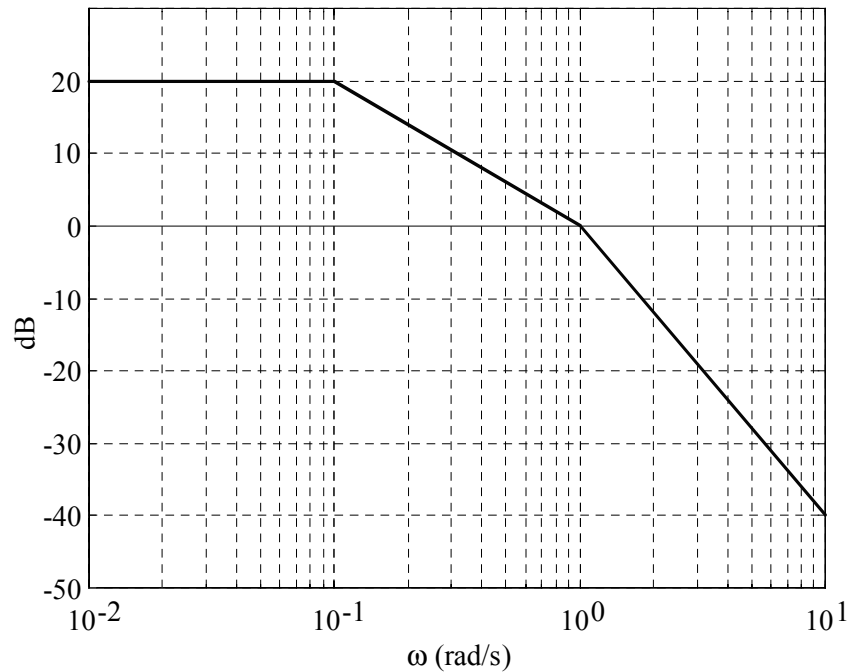


Fig. 12 : Diagramma di Bode asintotico di $|L_1|$

Risulta $\omega_c \approx 1$, e:

$$\varphi_m \approx 180^\circ - \left| -\arctan(1/0.1) - \arctan(1) - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} \right| = 180^\circ - \left| -84^\circ - 45^\circ - 1 \times 1 \times 57^\circ \right| = -6^\circ .$$

A causa della presenza del ritardo il sistema risulterebbe instabile.

Per il progetto si può considerare la soluzione di Fig. 13:

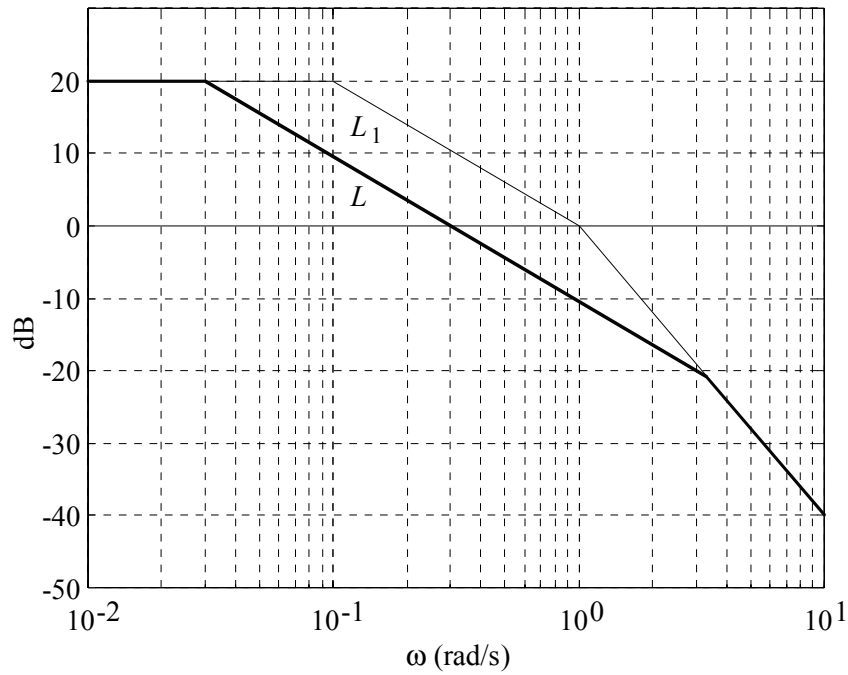


Fig. 13 : Diagrammi di Bode asintotici di $|L_1|$ e $|L|$

Risulta $\omega_c \approx 0.3$, e:

$$\varphi_m \approx 180^\circ - \left| -\arctan(0.3/0.03) - \arctan(0.3/3) - \omega_c \tau \frac{180^\circ}{\pi} \right| = 180^\circ - \left| -84^\circ - 6^\circ - 0.3 \times 1 \times 57^\circ \right| = 73^\circ .$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = 10 \frac{e^{-s}}{(1+s/0.03)(1+s/3)} = 10 \frac{e^{-s}}{(1+33s)(1+0.33s)} ,$$

da cui:

$$R_2(s) = \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{(1+10s)(1+s)}{(1+33s)(1+0.33s)} ,$$

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 10 \frac{(1+10s)(1+s)}{(1+33s)(1+0.33s)} .$$

Esempio di progetto per sistemi con disturbo sinusoidale

Per il sistema di controllo di figura:

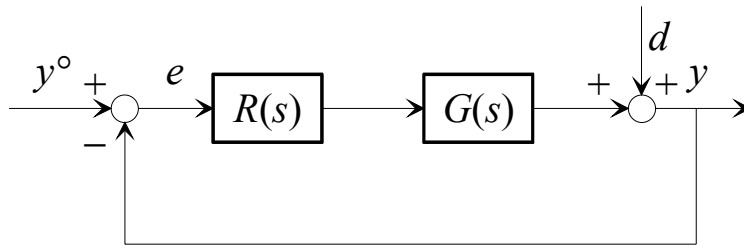


Fig. 14 : Sistema di controllo per l'esempio

dove:

$$G(s) = \frac{10}{s} \frac{1}{1+10s},$$

si vuole progettare il regolatore $R(s)$ in modo tale che:

- $e_\infty = 0$ per $y^o(t) = sca(t)$;
- un disturbo $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, con $\bar{\omega} \leq 0.03$, sia attenuato a regime, sull'uscita y , di un fattore almeno pari a 10;
- $\omega_c \geq 0.1 \text{ rad / s}$;
- $\varphi_m \geq 50^\circ$.

Progetto statico

Essendo il sistema sotto controllo di tipo 1, la specifica sull'errore a transitorio esaurito è automaticamente soddisfatta. Poniamo formalmente $R_1(s) = 1$.

Per quanto riguarda invece la specifica sull'attenuazione del disturbo, valida anch'essa a transitorio esaurito, utilizzeremo il teorema della risposta in frequenza, nell'ipotesi di poter rendere il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile.

La funzione di trasferimento dal disturbo d all'uscita y risulta:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = \frac{1}{1+L(s)} = S(s).$$

Pertanto, quando $d(t) = \sin(\bar{\omega}t)$, a transitorio esaurito si ha:

$$y(t) = |S(j\bar{\omega})| \sin(\bar{\omega}t + \angle S(j\bar{\omega})).$$

La specifica sull'attenuazione del disturbo si traduce quindi nella seguente condizione:

$$|S(j\bar{\omega})| < \frac{1}{10}, \quad \forall \bar{\omega} \leq 0.03.$$

D'altra parte sappiamo che:

$$|S(j\bar{\omega})| \approx \frac{1}{|L(j\bar{\omega})|},$$

essendo $\bar{\omega} \ll \omega_c, \forall \bar{\omega} \leq 0.03$, ossia $|L(j\bar{\omega})| \gg 1$.

Pertanto dovremo semplicemente imporre:

$$|L(j\bar{\omega})| > 10, \quad \forall \bar{\omega} \leq 0.03.$$

Progetto dinamico

Essendo $R_1(s) = 1$, risulta $L(s) = R_2(s) G(s)$. La Fig. 16 riporta i diagrammi di Bode del modulo di G e di L ottenuta secondo il solito criterio di progetto.

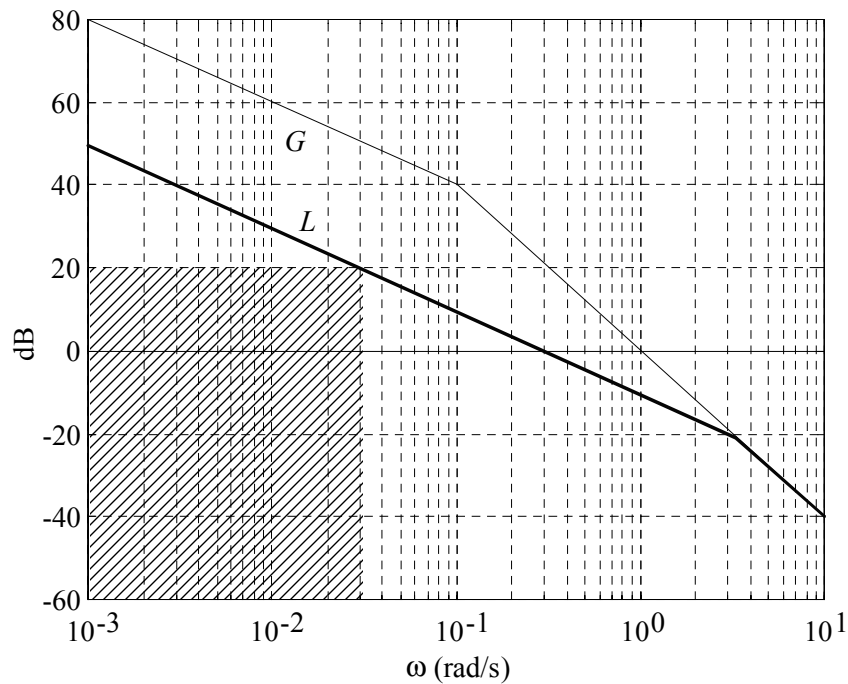


Fig. 15 : Diagrammi di Bode asintotici di $|G|$ e $|L|$

Si osservi che il vincolo sull'attenuazione del disturbo sinusoidale si traduce, graficamente, nell'individuazione di una "zona proibita", ossia di un'area nel piano del diagramma del modulo in cui il diagramma di $|L|$ non può entrare.

Risulta $\omega_c = 0.3$, e:

$$\varphi_m \approx 180^\circ - |90^\circ - \arctan(0.3/3)| = 180^\circ - |-90^\circ - 6^\circ| = 84^\circ.$$

Tutte le specifiche sono soddisfatte e risulta:

$$L(s) = \frac{0.3}{s} \frac{1}{1+0.33s}.$$

da cui:

$$R(s) = R_2(s) = \frac{L(s)}{G(s)} = \frac{0.3}{s} \frac{1}{1+0.33s} \frac{s(1+10s)}{10} = 0.03 \frac{1+10s}{1+0.33s}.$$

Compensazioni

Negli esempi precedenti non si è mai supposto di poter misurare il disturbo. La reazione degli effetti del disturbo sulla variabile controllata era affidata esclusivamente all'anello di controllo, il quale agisce sulla base del manifestarsi di un errore tra segnale di riferimento e variabile controllata. Se tuttavia il disturbo è effettivamente misurabile, è possibile sfruttare l'informazione data dalla misura e agire direttamente sulla variabile di controllo, anticipando l'effetto del disturbo sull'uscita, senza attendere che questo si manifesti in errore.

Si parla di **compensazione diretta** del disturbo quando:

- il disturbo è misurabile
- si esercita un'azione di controllo dipendente dalla sua misura.

Consideriamo dunque un sistema da controllare su cui agisce un disturbo:

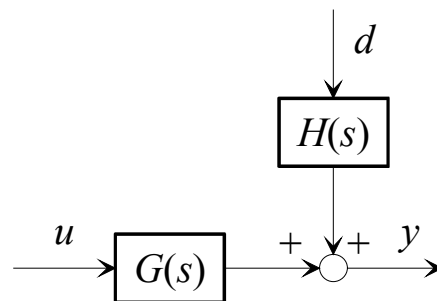


Fig. 16 : Sistema sotto controllo

Uno schema di compensazione potrebbe allora essere il seguente:

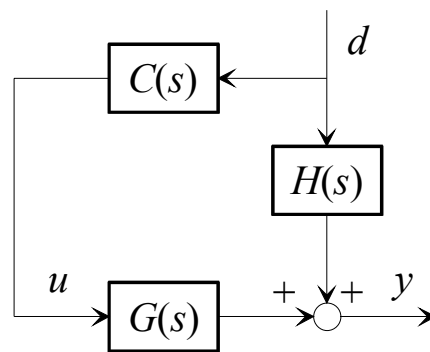


Fig. 17 : Compensazione del disturbo

La funzione di trasferimento $C(s)$ descrive il comportamento dinamico del **compensatore** e comprende anche l'effetto dinamico del trasduttore del disturbo, qualora esso non risulti trascurabile.

Per il progetto di $C(s)$ si può imporre che la funzione di trasferimento da d a y sia nulla:

$$\frac{Y(s)}{D(s)} = H(s) + C(s)G(s) = 0 ,$$

da cui:

$$C(s) = -\frac{H(s)}{G(s)}.$$

Spesso il risultato di questa operazione è una funzione di trasferimento non realizzabile o instabile. In tal caso ci si limita a rendere le due funzioni di trasferimento uguali solo approssimativamente. In particolare sono di interesse le seguenti approssimazioni:

- Si approssima il solo guadagno:

$$C(s) = \mu_C = -\frac{H(0)}{G(0)}.$$

in questo modo si annulla a regime l'effetto di un **disturbo costante**

- Si approssima la risposta in frequenza solo ad una determinata pulsazione $\bar{\omega}$:

$$C(j\bar{\omega}) = -\frac{H(j\bar{\omega})}{G(j\bar{\omega})}$$

in questo modo, progettando $C(s)$ asintoticamente stabile, si annulla a regime l'effetto di un **disturbo sinusoidale** alla pulsazione $\bar{\omega}$.

Di norma uno schema di compensazione viene associato ad uno schema di **retroazione** per rendere la reiezione del disturbo più robusta rispetto ad incertezze di modello e per soddisfare le altre specifiche. Si perviene allora allo schema di controllo di figura:

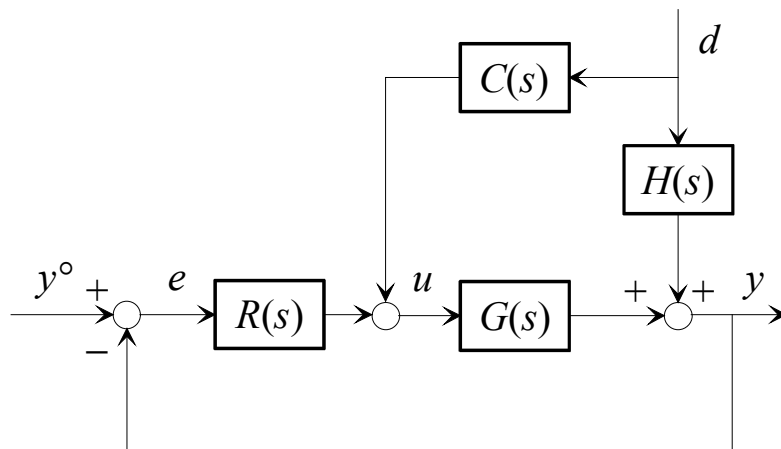
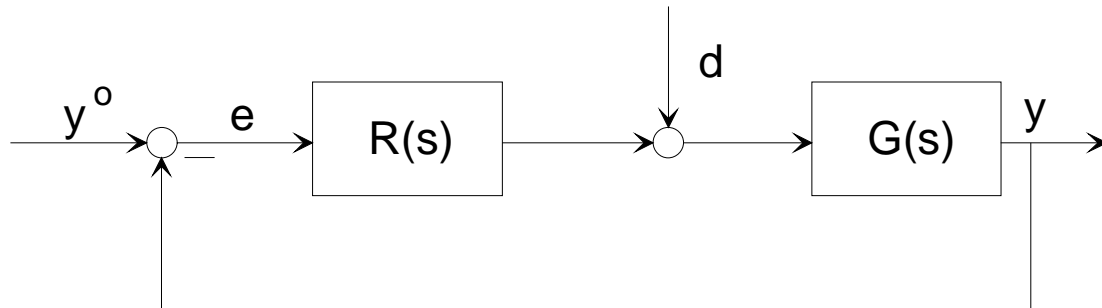


Fig. 18 : Controllo in retroazione con compensazione del disturbo

Esercizi

Esercizio 11.1

Con riferimento al seguente sistema di controllo:



in cui:

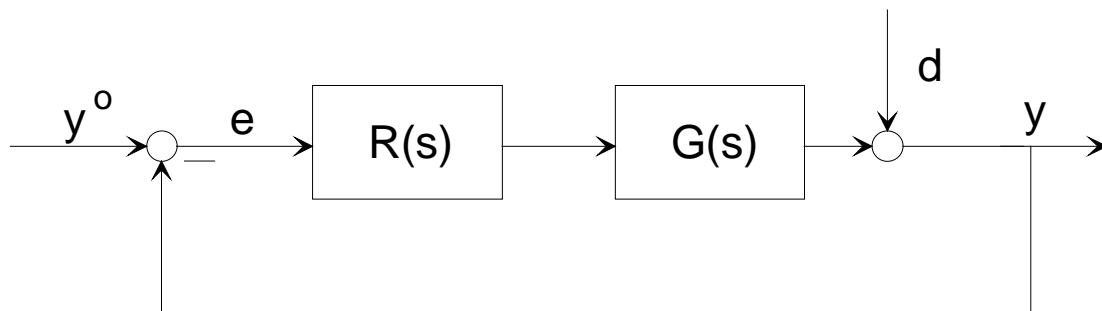
$$G(s) = \frac{1-0.1s}{(1+s)^4}$$

si progetti il regolatore $R(s)$ in modo tale che:

- $|e_\infty| \leq 0.2$ per $y^o(t) = 10\text{sca}(t), d(t) = \pm\text{sca}(t)$
- $\omega_c \geq 1 \text{ rad/s}$
- $\phi_m \geq 40^\circ$

Esercizio 11.2

Con riferimento al seguente sistema di controllo:



in cui:

$$G(s) = \frac{e^{-s}}{1+s}$$

si progetti il regolatore $R(s)$ in modo tale che:

- $e_\infty = 0$ per $d(t) = \text{sca}(t)$
- $\omega_c \geq 0.5 \text{ rad/s}$
- $\phi_m \geq 45^\circ$

Traccia delle soluzioni

Esercizio 11.1

Sia $R(s) = R_1(s)R_2(s)$, con $R_1(s) = \frac{\mu_R}{s^{g_R}}$.

Progetto statico

E' sufficiente un regolatore di tipo $g_R = 0$. Dalle tabelle si ottiene (supponendo il sistema in anello chiuso asintoticamente stabile)

- errore dovuto a y^o : $\left|e_{y^o_\infty}\right| = \frac{10}{1+\mu_R}$
- errore dovuto a d : $\left|e_{d_\infty}\right| = \frac{1}{1+\mu_R}$

(si osservi che, agli effetti statici, il disturbo d si può riportare inalterato in uscita).

Considerando il caso più sfavorevole si avrà:

$$\left|e_\infty\right| = \left|e_{y^o_\infty}\right| + \left|e_{d_\infty}\right| = \frac{11}{1+\mu_R} \leq 0.2 \Rightarrow \mu_R \geq 54.$$

Scegliamo $\mu_R = 100$, ossia $R_1(s) = 100$.

Progetto dinamico

Posto:

$$L_1(s) = 100G(s) = 100 \frac{1-0.1s}{(1+s)^4}$$

se ne traccia il diagramma di Bode del modulo. Senza ulteriori provvedimenti si otterrebbe margine di fase negativo. Si progetta quindi $L(s)$ in modo da tagliare a $\omega_c = 1$ e da raccordarsi in bassa e alta frequenza con la L_1 .

Si ottiene un margine di fase pari a:

$$\phi_m = 180^\circ - |-90^\circ - 3 \times 12^\circ - 5^\circ| = 180^\circ - 131^\circ = 49^\circ > 40^\circ.$$

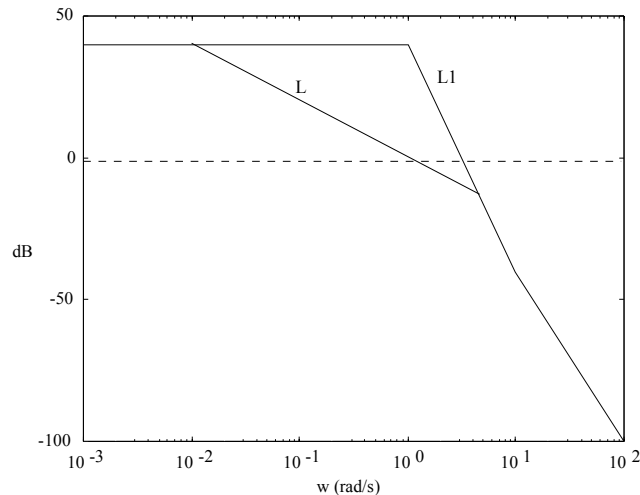
Si osservi che il contributo dello zero nel semipiano destro è modesto in quanto lo zero stesso si trova ad alta frequenza.

Si ricava l'espressione della $L(s)$:

$$L(s) = 100 \frac{1-0.1s}{\left(1+\frac{s}{0.01}\right)\left(1+\frac{s}{4.5}\right)^3} = 100 \frac{1-0.1s}{(1+100s)(1+0.22s)^3},$$

da cui:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = 100 \frac{L(s)}{L_1(s)} = 100 \frac{(1+s)^4}{(1+100s)(1+0.22s)^3}.$$



Esercizio 11.2

Sia $R(s) = R_1(s)R_2(s)$, con $R_1(s) = \frac{\mu R}{s^{g_R}}$.

Progetto statico

La specifica sull'errore a transitorio esaurito impone la presenza di un integratore nell'anello, e quindi l'adozione di un regolatore di tipo 1: $g_R = 1$. Il guadagno del regolatore è arbitrario. Scegliamo quindi:

$$R_1(s) = \frac{1}{s}.$$

Progetto dinamico

Posto:

$$L_1(s) = R_1(s)G(s) = \frac{1}{s} \frac{e^{-s}}{1+s}$$

se ne traccia il diagramma di Bode del modulo. Senza ulteriori provvedimenti si otterrebbe, a causa del ritardo presente nel processo, un sistema instabile in anello chiuso:

$$\phi_c = -90^\circ - 45^\circ - 1 \times 1 \times \frac{180^\circ}{\pi} = -192^\circ$$

Si progetta quindi $L(s)$ in modo da tagliare con pendenza -1 a $\omega_c = 0.5$ e si raccorda il diagramma in alta frequenza con quello di L_1 . Si osservi che non è necessario raccordare i diagrammi in bassa frequenza in quanto il progetto statico non impone vincoli sul guadagno del regolatore.

Si ottiene un margine di fase pari a:

$$\phi_m = 180^\circ - \left| -90^\circ - 13^\circ - 0.5 \times 1 \times \frac{180^\circ}{\pi} \right| = 48^\circ > 45^\circ$$

Si ricava l'espressione della $L(s)$:

$$L(s) = \frac{0.5}{s} \frac{1+s}{1+\frac{s}{2}} e^{-s} = \frac{0.5}{s} \frac{1+s}{1+0.5s} e^{-s} ,$$

da cui:

$$R(s) = R_1(s)R_2(s) = \frac{1}{s} \frac{L(s)}{L_1(s)} = \frac{0.5}{s} \frac{1+s}{1+0.5s} .$$

